



Markus Wessler

Grundzüge der Finanzmathematik

mathematisch vernünftige, die durchgehend exponentielle, stetige Verzinsung, kommen wir, wie gesagt, in Abschnitt 2.6 zu sprechen.

Nun, da wir wissen, wie mit unterperiodischen Zeiträumen bei exponentieller Verzinsung umzugehen ist, können wir auch ein weiteres bereits angesprochenes Problem klären. Im Anschluss an Beispiel 2.12 hatte sich die Fragestellung ergeben, wie man unterperiodische Laufzeiten berechnen kann. Mithilfe des Modells der kalenderjährlichen Verzinsung können nun auch Zeitpunkte genau bestimmt werden, und zwar durch Betrachtung konkreter Daten:

Beispiel 2.17

Am 26.08.2013 wird ein Startkapital von 500 € bei einem Jahreszins von 5 % angelegt. Wann ist es auf 550 € angewachsen?

Lösung: Das Auflösen von (2.7) nach n lieferte bereits zuvor den Wert

$$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(q)} = \frac{\log\left(\frac{550}{500}\right)}{\log(1,05)} \approx 1,95347.$$

Dies lässt sich als „knapp zwei Jahre“ deuten. Nach (2.11) muss dann gelten

$$550 = 500 \cdot \left(1 + \frac{125}{360} \cdot 0,05\right) \cdot 1,05 \cdot \left(1 + \frac{t_2}{360} \cdot 0,05\right), \quad (2.12)$$

denn dass $t_1 = 125$ und $N = 1$ ist, ist nach den Vorüberlegungen klar. Auflösen der Gleichung (2.12) nach t_2 ergibt dann

$$t_2 \approx 214,14.$$

Also wird am 215. Tag des Jahres 2015, mit anderen Worten am 05.08., ein Kapital von 550 € überschritten.

Beispiel 2.18

Ein Betrag von 1.000 € bei quartalsweiser Verzinsung am 09.09.2013 mit dem Quartalszins $i = 2\%$ angelegt. Berechnet werden soll das Kapital am 21.07.2016, wenn kalenderjährliche Verzinsung zugrunde gelegt wird.

Lösung: In der Formel (2.11) muss nun lediglich 360 durch 90 ersetzt werden. Für die Laufzeit gilt

$$n = \frac{22}{90} + 11 + \frac{20}{90},$$

und mit der entsprechenden Anpassung der Formel (2.11) ergibt sich das Endkapital

$$K_n = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{22}{90} \cdot 0,02\right) \cdot 1,02^{11} \cdot \left(1 + \frac{20}{90} \cdot 0,02\right) \approx 1.255,01 \text{ €}.$$



Aufgaben zum Abschnitt 2.4

1. Auf welchen Betrag ist ein Guthaben von 6.000 € am 17.03.2019 angewachsen, das am 08.10.2015 bei einem Jahreszinssatz von 3,8 % angelegt wurde?
2. Am 21.03.2014 werden 5.000 € bei einem Jahreszins von 4,5 % angelegt. Wann ist das Guthaben auf 6.000 € angewachsen?
3. Betrachten Sie eine durchgehend lineare Verzinsung mit 3,8 % p. a. im Gegensatz zu einer kalenderjährlichen Verzinsung mit 3,3 % p. a. In beiden Modellen werde am 22.04.2014 ein Betrag von 1.200 € angelegt.
 - (a) Bei welchem Modell ergibt sich am 12.02.2016 ein größeres Guthaben und um welchen Prozentsatz ist es größer?
 - (b) Bestimmen Sie den Tag, an dem sich in beiden Modellen das gleiche Guthaben ergibt.
4. Welcher Betrag muss am 23.05.2015 angelegt werden, um am 14.08.2019 über 20.000 € zu verfügen, falls
 - (a) komplett linear
 - (b) kalenderjährlich
 mit einem Jahreszins von jeweils $i = 5,1\%$ verzinst wird?
5. Am 01.06.2015 wird ein Kapital von 2.000 € bei einem Halbjahreszinssatz von 1,75 % angelegt. Berechnen Sie, wann es bei reiner linearer Halbjahresverzinsung auf 2.500 € angewachsen ist und berechnen Sie zum Vergleich den entsprechenden Zeitpunkt für die kalenderjährliche Halbjahresverzinsung.
6. Am 18.04.2020 soll über einen Betrag von 20.000 € verfügt werden. Dazu wird am 05.12.2014 ein Startkapital K_0 angelegt.
 - (a) Bestimmen Sie K_0 , falls kalenderjährlich mit 3,9 % p. a. verzinst wird.
 - (b) Bestimmen Sie K_0 , falls kalenderhalbjährlich mit 1,8 % p. a. verzinst wird.
 - (c) Wie müsste kalenderjährlich verzinst werden, falls das Startkapital 16.000 € beträgt?

2.5 Unterperiodische Verzinsung

Die zentralen Formeln der bisherigen Zinsprozesse gelten für beliebige Zinsperioden. In der Praxis sind dabei Zinsperioden, die ein Jahr übersteigen, unüblich; in der Regel sind die Zinsperioden ein Jahr oder kürzer. Das Rechnen mit beliebigen Zinsperioden kann allerdings einige Schwierigkeiten mit sich bringen, beispielsweise dann, wenn der Zins für ein Jahr angegeben wird, aber die Zuschläge doch unterjährig erfolgen.

Nehmen wir etwa an, eine Bank gibt für die Verzinsung eines Kapitals den *nominalen* Jahreszinssatz $i = 6\%$. Darunter versteht man den Zinssatz, mit dem in allen bisherigen Modellen stets gerechnet wurde: den Zinssatz i , der in die Formeln einzusetzen ist. Nun bietet die Bank allerdings an, dass die Zinszuschläge nicht erst am

Jahresende, sondern bereits *am Ende jedes Quartals* erfolgen sollen. Es soll also „zwischenverzinst“ werden. Mithilfe von (2.3) kann dann das Kapital am Ende des ersten Quartals berechnet werden, nämlich

$$K_{\frac{1}{4}} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot i\right) = K_0 \cdot 1,15.$$

Die unterjährigere Verzinsung wird ja zunächst einmal linear berechnet. Den hier auftauchenden Zinssatz 1,5 % nennt man in diesem Zusammenhang den *relativen Zinssatz*, genauer den relativen Quartalszinssatz zum nominellen Jahreszinssatz 6 %.

Nun soll, abweichend vom rein linearen Modell, dieses erreichte Kapital mitverzinst werden, und dies ab sofort nach jedem Quartal. Man erhält auf diese Methode ein neues Modell, ein exponentielles, und zwar mit dem Aufzinsungsfaktor $q = 1,15$, der durch den relativen Zinssatz gegeben ist. Das Kapital K_0 wächst dann nach einem Jahr, also nach vier Zinszuschlagterminen, auf

$$K_4 = K_0 \cdot 1,015^4 \approx K_0 \cdot 1,06136$$

an. Man sieht hieran, dass *effektiv* ein höherer Zins als 6 % zugeschlagen wurde, nämlich ungefähr 6,136 %.

Zu den drei Zinsbegriffen, die in diesem Modell bislang vorkommen, gesellt sich ein vierter hinzu: Man kann sich nämlich nun fragen, welcher Quartalszins denn auf einen *effektiven Jahreszinssatz* von 6 % führt. Für diesen Quartalszins i_k , den man den *konformen Quartalszinssatz* nennt, gilt:

$$(1 + i_k)^4 = 1,06,$$

woraus man $i_k = 1,467\%$ berechnet.

Das Beispiel macht plausibel, dass man vier verschiedene Zinsbegriffe auseinanderhalten muss:

Unterperiodische Zinssätze

1. Nomineller Zinssatz:

Dies ist der für eine Zinsperiode geltende Zinssatz i_n , der den bisherigen Formeln zugrunde liegt und der keine Zwischenverzinsungen berücksichtigt.

2. Relativer Zinssatz:

Wird die Periode in m Teilperioden gleicher Länge eingeteilt, so ist dies der Zinssatz, der für jede der Teilperioden gilt.

3. Effektiver Zinssatz:

Dieser Zinssatz gibt den für die gesamte Periode resultierenden tatsächlichen Zinssatz an, wenn zu den m unterperiodischen Terminen zwischenverzinst wird.

4. Konformer Zinssatz:

Darunter versteht man denjenigen unterperiodischen Zinssatz, mit dem zwischenverzinst werden muss, um am Ende der Periode einen gewünschten effektiven Zinssatz zu erhalten.



Im einführenden Beispiel von oben galt ein *nomineller* Jahreszinssatz von $i_n = 6\%$, aus dem der *relative* Quartalszinssatz $i_r = 1,5\%$ resultiert. Bei dieser Quartalszwischenverzinsung ergibt sich ein *effektiver* Jahreszinssatz von $6,136\%$. Man kann dann auch sagen, dass der Quartalszins von $1,5\%$ *konform* zum *effektiven* Jahreszins von $6,136\%$ ist. Soll dagegen ein *effektiver* Jahreszins von $i_e = 6\%$ erreicht werden, ist hierfür der *konforme* Quartalszins $i_k = 1,467\%$ erforderlich. Für schnelle Berechnungen geben wir hier die Formeln kompakt an:

Merke!

Zusammenhänge zwischen nominellem, relativem, effektivem und konformem Zinssatz

Es bezeichne jeweils m die Anzahl der Teilperioden einer gegebenen vollen Periode. Dann gelten folgende Umrechnungen:

- Relativer Zinssatz i_r bei gegebenem nominellen Zinssatz i_n :

$$i_r = \frac{i_n}{m}. \quad (2.13)$$

- Effektiver Zinssatz i_e bei gegebenem nominellen Zinssatz i_n :

$$i_e = \left(1 + \frac{i_n}{m}\right)^m - 1. \quad (2.14)$$

- Konformer Zinssatz i_k bei gegebenem effektiven Zinssatz i_e :

$$i_k = \sqrt[m]{1 + i_e} - 1. \quad (2.15)$$

Bei rein linearer Verzinsung ist diese ganze Unterscheidung natürlich hinfällig, denn in dem Fall sind nomineller und effektiver Zinssatz sowie relativer und konformer Zinssatz stets identisch.

Beispiel 2.19

Es sollen die Festgeldangebote zweier Banken verglichen werden. Die eine gewährt einen nominellen Jahreszins von $5,26\%$ bei einer Anlage für 30 Tage und die andere einen nominellen Jahreszins von $5,32\%$ bei einer Anlage für 60 Tage.

Lösung: Der effektive Jahreszins ist ein sinnvolles Vergleichskriterium. Er ergibt sich zu

$$i_e = \left(1 + \frac{0,0526}{12}\right)^{12} - 1 \approx 5,389\%$$

bzw. zu

$$i_e = \left(1 + \frac{0,0532}{6}\right)^6 - 1 \approx 5,439\%,$$

und damit ist das zweite Angebot das lohnendere.

Beispiel 2.20

Es soll ein Effektivzins von 4 % erreicht werden. Für halbjährliche, quartalsweise und monatliche Zwischenverzinsungen ist dafür jeweils ein geeigneter nomineller Jahreszinssatz zu finden.

Lösung: Effektiv 4 % Jahresverzinsung werden für die drei Fälle $m = 2$, $m = 4$ bzw. $m = 12$ jeweils durch die konformen Zinssätze

$$i_{k,2} = \sqrt{1,04} - 1 \approx 1,9804 \%$$

bzw.

$$i_{k,4} = \sqrt[4]{1,04} - 1 \approx 0,9853 \%$$

bzw.

$$i_{k,12} = \sqrt[12]{1,04} - 1 \approx 0,3274 \%$$

erreicht. Damit ergeben sich die nominellen Jahreszinssätze

$$i_{n,2} \approx 3,9608 \% \quad \text{bzw.} \quad i_{n,4} \approx 3,9412 \% \quad \text{bzw.} \quad i_{n,12} \approx 3,9288 \%$$

durch entsprechendes Multiplizieren. Ausgehend von dem gerundeten nominellen Jahreszinssatz $i_{n,2} \approx 3,9608 \%$ etwa ergibt sich für halbjährliche Zwischenverzinsungen tatsächlich ein effektiver Zins

$$i_e = \left(1 + \frac{0,039608}{2}\right)^2 - 1 \approx 4 \%$$

Aufgaben zum Abschnitt 2.5

1. Berechnen Sie den effektiven Jahreszins bei einem nominellen Jahreszins von $i_n = 5,4 \%$ und
 - (a) halbjährlicher Zwischenverzinsung.
 - (b) quartalsweiser Zwischenverzinsung.
 - (c) monatlicher Zwischenverzinsung.
2. Ein Guthaben vermehrt sich zunächst bei einem nominellen Jahreszinssatz von 5 % drei Jahre lang mit quartalsweisen Zwischenverzinsungen. Danach wird auf monatliche Zwischenverzinsungen umgestellt.
 - (a) Bestimmen Sie den Prozentsatz, um den das Guthaben nach insgesamt fünf Jahren angewachsen ist.
 - (b) Bestimmen Sie den durchschnittlichen effektiven Jahreszins für die fünf Jahre.
 - (c) Wie lange muss monatlich zwischenverzinst werden, bis sich das Guthaben verdoppelt?



- 3.** Welches der beiden folgenden Kreditangebote ist vorteilhafter für den Kreditnehmer:
- eine nominelle Jahresverzinsung von 18,5 %,
 - eine nominelle Jahresverzinsung von 17 % mit vierteljährlichen Zwischenverzinsungen?
- 4.** Ein Guthaben wird bei einem nominellen Jahreszinssatz von 4,1 % verzinst.
- Welchem effektiven Jahreszinssatz entspricht dies, falls monatlich zwischenverzinst wird?
 - Welcher nominelle Jahreszinssatz ergibt den gleichen effektiven Jahreszinssatz wie im vorhergehenden Aufgabenteil, wenn quartalsweise zwischenverzinst wird?
- 5.** Berechnen Sie näherungsweise, wie oft im Laufe eines Jahres zwischenverzinst werden muss, damit ein nomineller Jahreszins von 3,5 % einer effektiven Jahresverzinsung von 3,55 % entspricht.

2.6 Stetige Verzinsung

Im letzten Abschnitt haben wir die unterperiodischen Verzinsungen und die damit verbundenen wichtigen Begriffe wie den Effektivzins kennengelernt. Alle bisher betrachteten Verzinsungen, auch die Zwischenverzinsungen, sind diskret. Das bedeutet, sie finden zu einzelnen, klar voneinander trennbaren Zeitpunkten statt. Man kann sich nun fragen, was passiert, wenn die Anzahl der Teilperioden immer weiter erhöht wird, und zwar schließlich so weit, dass die Zuschlagstermine nicht mehr trennbar sind, dass also „in jedem Moment“ verzinst wird. Diesen Übergang vom diskreten zum sogenannten stetigen oder kontinuierlichen Fall werden wir nun behandeln.

Greifen wir dazu das Beispiel aus dem vorangehenden Abschnitt noch einmal auf: Eine nominelle Jahresverzinsung von $i_n = 6\%$ ergab bei quartalsweisen Zwischenverzinsungen einen effektiven Jahreszins von ungefähr $i_e = 6,136\%$. Wie sieht dies bei monatlichen Zwischenverzinsungen aus? Es ergibt sich entsprechend nach (2.14)

$$i_e = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 \approx 6,168\% .$$

Für tägliche Zwischenverzinsungen erhält man sogar

$$i_e = \left(1 + \frac{0,06}{360}\right)^{360} - 1 \approx 6,183\% .$$

Man sieht, dass bei gegebenem nominellen Jahreszinssatz mit wachsender Anzahl der Teilperioden der Effektivzins immer größer wird. Beispiel 2.20 bestätigte bereits diese Beobachtung in der anderen Richtung: Ein gegebener Effektivzins wird mit wachsender Anzahl der Teilperioden durch einen immer kleineren Nominalzins erreicht.

Vernünftigerweise sollte es nun nicht möglich sein, dass der effektive Zinssatz bei gegebenem nominellen Zinssatz beliebig groß werden kann, und Abb. 2.4 legt dies auch nahe: Mit wachsender Zahl m der Zwischenverzinsungen steigt der Effektivzins zwar stetig an, die Wachstumsraten allerdings scheinen mit der Zeit zu stagnieren: Der Effektivzins scheint sich einem festen Wert zu nähern.

In der Tat ist dies der Fall, wie auch das folgende Gedankenexperiment deutlich macht, das in diesem Zusammenhang gern herangezogen wird: Es beschäftigt sich mit der Frage, was aus einem Euro werden kann, wenn man einen Zinssatz von 100 % ansetzt. Am Ende des Jahres hat sich dann der Euro natürlich bei nomineller Verzinsung verdoppelt; nun aber werden Zwischenverzinsungen betrachtet. Gibt es etwa nach einem halben Jahr einen Zwischenzuschlagstermin, so beträgt das Guthaben am Ende des Jahres

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \text{ €}.$$

Bei quartalsweisen Zwischenverzinsungen ergeben sich

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx 2,4414 \text{ €}.$$

Lässt man nun die Zahl der Zwischenverzinsungen immer weiter wachsen, so wird das Guthaben zwar immer größer, scheint aber eine gewisse Grenze nicht zu übersteigen. Für den theoretischen Fall *sekundlicher Zinszuschläge* ergibt sich schließlich

$$\left(1 + \frac{1}{31.104.000}\right)^{31.104.000} \approx 2,71828 \text{ €}.$$

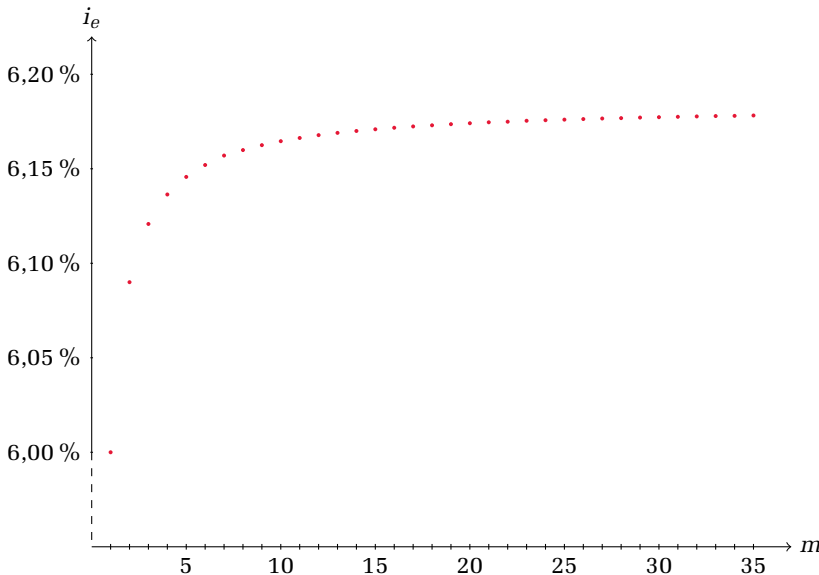


Abbildung 2.4: Der effektive Zinssatz i_e bei einem nominellen Jahreszinssatz von $i_n = 6\%$ in Abhängigkeit von der Anzahl m der Zwischenverzinsungen.

Hier aber wird etwas Bemerkenswertes offenbar: Der Wert, dem sich die Guthaben annähern, ist die eulersche Zahl e . Und in Aufgabe 8 aus Abschnitt 1.2 haben wir uns klargemacht, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

gilt. Ersetzt man den plakativen Zinssatz 100 % nun durch einen beliebigen nominalen Zinssatz i_n , so gilt entsprechend:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_n}{m}\right)^m = e^{i_n}.$$

Bei dem beschriebenen Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ für die Anzahl der Teilperioden spricht man von *stetiger Verzinsung* oder auch *konformer Verzinsung*.

Definition Bei gegebenem nominellen Periodenzinssatz i_n wächst mit der Anzahl der Zwischenverzinsungen m der resultierende effektive Zinssatz i_e . Beim Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ spricht man von **stetiger Verzinsung**. Bei diesem Modell nennt man dann den nominellen Zinssatz auch **stetigen Zinssatz** und schreibt hierfür i_s .

Nach obigem Modell gilt also

$$K_1 = K_0 \cdot e^{i_s}.$$

Dass die stetige Verzinsung als Modell aus dem Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ hervorgeht, bedeutet dann aber im Prinzip, dass zu *jedem Zeitpunkt* Zinsen zugeschlagen werden und man das resultierende Kapital K_t auch zu jedem beliebigen Zeitpunkt t bestimmen kann:

Merke!

Stetige Verzinsung

Bei stetiger Verzinsung eines Startkapitals K_0 mit dem stetigen Zinssatz i_s gilt für das Kapital zum Zeitpunkt t

$$K_t = K_0 \cdot e^{t \cdot i_s}. \quad (2.16)$$

Der diskrete Zinsprozess, mit Zinszuschlägen zu separierten, abgegrenzten Zuschlags-terminen, ist damit in einen kontinuierlichen übergegangen, der einen ganz anderen Charakter hat als etwa die kalenderjährliche Verzinsung. Der stetige Zinsprozess ist „glatter“; er vermeidet Sprünge. Das ist zunächst nur ein mathematischer Vorteil, doch tatsächlich wird die stetige Verzinsung sehr oft zur Modellierung von Finanzprozessen herangezogen, wenn auch nicht im alltäglichen Bankgeschäft.

Vergleicht man die Formel (2.16) mit der Formel (2.7), so fällt einem sofort die Analogie ins Auge: Hier wie dort berechnet sich das Kapital K_n bzw. K_t durch die *Multiplikation* von K_0 mit einem gewissen Faktor: bei der exponentiellen Verzinsung mit q^n und bei der stetigen Verzinsung mit $(e^{i_s})^t$. Versteht man die stetige Verzinsung als konforme Fortsetzung der exponentiellen Verzinsung (was sie ja auch ist), dann sollte für einen „effektiven Aufzinsungsfaktor“ q_e die Gleichung

$$q_e = e^{i_s}$$

gelten. Auch bei der stetigen Verzinsung gibt es damit den Begriff eines effektiven Zinssatzes i_e und den folgenden Zusammenhang zwischen stetigem und effektivem Zinssatz:

Zusammenhang von stetigem und effektivem Zinssatz

Bei der stetigen Verzinsung gilt der Zusammenhang

$$i_e = e^{i_s} - 1 \quad \text{bzw.} \quad i_s = \ln(1 + i_e). \quad (2.17)$$

Merke!

Damit lässt sich (2.16) alternativ durch

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i_e)^t = K_0 \cdot q_e^t \quad (2.18)$$

ausdrücken. Die Gleichung (2.18) zeigt unmittelbar, dass die stetige Verzinsung als Verallgemeinerung der exponentiellen Verzinsung auf beliebige Zeitpunkte t gesehen werden kann, wobei der Aufzinsungsfaktor $q_e = e^{i_s}$ zugrunde liegt.

Die Konformität der stetigen Verzinsung geht nun allerdings einher mit der Tatsache, dass sich hier grundsätzlich ein kleineres Endkapital als bei der kalenderjährlichen Verzinsung ergibt:

Beispiel 2.21

Ein Startkapital von $K_0 = 2.000 \text{ €}$ wird am 12.06. eines Jahres bei einem nominellen Jahreszinssatz von $i = 7 \%$ angelegt. Gesucht ist der Betrag, auf den das Guthaben am 23.12. bei kalenderjährlicher bzw. bei stetiger Verzinsung angewachsen ist.

Lösung: Der Zeitraum berechnet sich zu

$$n = \frac{19 + 5 \cdot 30 + 22}{360} = \frac{191}{360}.$$

Mit dem Modell der kalenderjährlichen Verzinsung erhält man

$$K_n = 2.000 \cdot \left(1 + \frac{191}{360} \cdot 0,07 \right) \approx 2.074,28 \text{ €},$$

während stetige Verzinsung nach (2.18) nur

$$K_n = 2.000 \cdot 1,07^{\frac{191}{360}} \approx 2.073,10 \text{ €}$$

ergibt.

Der stetige (nominelle) Zinssatz i_s lässt auch noch eine andere Interpretation zu. Man kann sich hierzu die Frage stellen, mit welchem nominellen Zins ein effektiver Zins von 7% erreicht werden kann. Für quartalsweise Zwischenverzinsungen beispielsweise ergibt sich nach (2.15) ein konformer Zins von

$$i_k = \sqrt[4]{1,07} - 1 \approx 1,706 \%,$$

also ein nomineller Zinssatz von

$$i_n \approx 4 \cdot 0,01706 \approx 6,824 \% .$$

Der effektive Zinssatz $i_e = 7\%$ kann aber auch noch anders erreicht werden – indem nämlich die Anzahl der Zwischenverzinsungen erhöht wird. So landet man schließlich wieder beim Modell der stetigen Verzinsung. Nach (2.17) gilt

$$i_s = \ln(1,07) \approx 6,766 \% .$$

Ein kleinerer nomineller Zinssatz ist nicht möglich. Es gilt allgemein:



Stetiger Zins als minimaler Nominalzins

Der stetige Zinssatz ist der kleinste nominelle Zinssatz, der zu einer vorgegebenen Effektivverzinsung führt.

Grundsätzlich ist es wegen der Umrechnungsmöglichkeiten natürlich gleichgültig, ob mit stetiger oder mit diskreter Verzinsung gerechnet wird. So ergibt etwa die Verzinsung eines Kapitals von $K_0 = 100\text{ €}$ mit 10% Jahreszins nach zwei Jahren das Kapital

$$K_2 = 100 \cdot 1,1^2 = 121\text{ €} ,$$

und der stetige Zinssatz

$$i_s = \ln(1,1) = 0,09531 = 9,531\%$$

ergibt bei stetiger Verzinsung das gleiche Resultat:

$$K_2 = 100 \cdot e^{2 \cdot 0,09531} \approx 121\text{ €} .$$

Sollten die beiden Verzinsungen bei Rechnungen manchmal nicht exakt übereinstimmen, liegt dies erneut an der Rundung. Eventuell muss dann die Anzahl der Nachkommastellen erhöht werden. Es hat sich eingebürgert, dass in der „Bankenpraxis“ diskret gerechnet wird, während die stetige Verzinsung eher bei theoretischen Modellen der Finanzwirtschaft eingesetzt wird.



Aufgaben zum Abschnitt 2.6

1. Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz bei einer stetigen Verzinsung mit $i_s = 2,65\%$
2. Bestimmen Sie den kleinsten nominellen Jahreszinssatz, der zu einer Effektivverzinsung von $2,9\%$ führt.
3. Wann verdoppelt sich bei stetiger Verzinsung mit $i_s = 4\%$ ein Guthaben?
4. Ein Betrag von 5000 € wird bei einem stetigen Jahreszinssatz von 3% verzinst. Wann ist der Betrag auf 6.000 € angewachsen?

5. Um welchen Prozentsatz ist eine stetige Verzinsung für einen Kreditnehmer günstiger als eine jährliche Verzinsung mit 8 %?
6. Ein Betrag von 1.000 € wird auf ein Konto mit einem nominellen Jahreszins von 6 % angelegt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt möglichst genau, zu dem sich dieser Betrag bei
- durchgehend linearer
 - kalenderjährlicher
 - stetiger
- Verzinsung verdoppelt hat.
7. Ein Anleger, der eine Abneigung gegen die eulersche Zahl e hat, legt einen Betrag von 2.500 € bei einem stetigen Jahreszinssatz von $i_s = 3,7\%$ an. Geben Sie eine Formel für das Guthaben zum Zeitpunkt t an, in der die Zahl e nicht vorkommt.
8. Ein Sparguthaben von 12.345 € werde mit einem nominellen Jahreszinssatz von 7 % verzinst.
- Bestimmen Sie das Guthaben nach acht Jahren bei kalenderjährlicher und bei stetiger Verzinsung.
 - Geben Sie im vorangehenden Aufgabenteil jeweils den effektiven Jahreszinssatz an.
 - Bestimmen Sie für beide Fälle den Zeitpunkt, zu dem das Guthaben sich um 20 % vermehrt hat.

2.7 Inflation

Der Wert des Geldes ist keine feste nominelle Größe. So kann man sich heute für einen Betrag von 100 € vielleicht Waren kaufen, für die man vor zwei oder drei Jahren hätte weniger bezahlen müssen und für die man in zwei oder drei Jahren wird mehr bezahlen müssen. Die so mit der Zeit einhergehende Änderungsrate des Preisniveaus nennt man *Inflation*. Das Preisniveau ist ein abstrakter Begriff, der sich konkretisieren kann an den sogenannten *Lebenshaltungskosten*. Da auch diese natürlich sehr individuell sind, zieht man zu Vergleichszwecken einen *Standardwarenkorb* heran, den Warenkorb eines „durchschnittlichen Konsumenten“.

Kostet der oben erwähnte Warenkorb beispielsweise heute 100 € und in einem Jahr 103 €, so beträgt die *Inflationsrate* 3 %. Die Inflationsrate kann grundsätzlich positiv oder negativ sein; manchmal spricht man von *Deflation*, wenn es sich um einen Rückgang des Preisniveaus handelt. Im Grunde ähnelt damit die Beschreibung der Inflation einem Zinsprozess, und man führt daher analoge Bezeichnungen ein, so etwa i_{infl} für die prozentuale Inflationsrate pro Zeiteinheit oder $q_{\text{infl}} = 1 + i_{\text{infl}}$ für den sogenannten *Inflationsfaktor*.

Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: info@pearson.de

Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

<http://ebooks.pearson.de>